## PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - 2\text{Log}x - 1$. On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

**I]1)a-** Etudier les variations de la fonction f.

**b-** Tracer la courbe $C_f$.

**2)** Soit $\lambda$ un réel de l'intervalle $]0;1[$ et $A(\lambda)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $C_f$ et les droites d'équations respectives $x = \lambda, x = 1$ et $y = 0$.

**a-** Calculer $A(\lambda)$.

**b-** Déduire que $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda) = \frac{4}{3}$.

**II]1)** Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

**a-**Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

**b-** En déduire que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

**2)** On pose pour tout entier $n \geq 2, S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

**a-** Montrer que $A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{1}{n}\right)$.

**b-** En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{4}{3}$.

**3)a-** Montrer par récurence que, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$;

on a : $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

**b-** Montrer que $S_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2\text{Log}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} - 1 + \frac{1}{n}$.

**c-** En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

# UNE CORRECTION POSSIBLE

## EXERCICE 1

**1/a-** ABC est un triangle équilatéral donc $AB = AC$ et $AB \neq 0$

$\Rightarrow$ il existe un seul antidéplacement f tel que $f(B)=A$ et $f(A)=C$.

**b-** f est antidéplacement $\Rightarrow$ f est soit une symetrie axiale soit une symetrie glissante.